Лекция 4. Однородные и линейные ДУ 1-го порядка. Уравнение Бернулли

Тлеулесова Айгеим Мекемтасовна

Цель лекции

- • Понять методы решения однородных ДУ
- • Научиться приводить уравнения к однородным
- • Изучить линейные ДУ первого порядка
- • Освоить уравнение Бернулли

Основные вопросы

- 1. Однородные уравнения первого порядка
- 2. Замена $y = ux$
- 3. Уравнения, приводящиеся к однородным
- 4. Линейные ДУ $y' + P(x)y = Q(x)$
- 5. Уравнение Бернулли

Однородные уравнения

- Однородная функция:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция *f(x; y)* называется однородной функцией *n*-го измерения, если для любого λ выполняется равенство

$$f\left(\lambda_x;\lambda_y\right)=\lambda^n\cdot f\left(x;y\right)$$

$f\left(x;y\right)=\sqrt{x^2\cdot y^2+2y^4}$ – однородная второго порядка (измерения)

$$f\left(\lambda_x;\lambda_y\right)=\sqrt{\lambda^2\cdot x^2\cdot\lambda^2\cdot y^2+2\lambda^4\cdot y^4}=\lambda^2\cdot\sqrt{x^2\cdot y^2+2y^4}=\lambda^2\left(x;y\right)$$

- Однородное ДУ: Уравнение $y' = f(x; y)$, где $f(x; y)$ – однородная функция нулевого измерения, называется однородным уравнением первого порядка. $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$
- Замена: y = ux, y' = u + x u'

Пример однородного уравнения

$$x \cdot y' - y = x \cdot \operatorname{tg}\frac{y}{x}$$

$$x \cdot y' = x \cdot \operatorname{tg}\frac{y}{x} + y \quad (\text{разделим на } \; x)$$

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}, \qquad y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \text{уравнение однородное}$$

$$u = \frac{y}{x}, \qquad y' = u' \cdot x + u$$

$$u' \cdot x + u = u + \operatorname{tg} u, \qquad \frac{du}{dx} \cdot x = \operatorname{tg} u, \qquad \operatorname{ctg} u \, du = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\sin u = c \cdot x, \qquad \underline{\sin\frac{y}{x} = c \cdot x}$$

Уравнения, приводящиеся к однородным

$$y' = f\left(\frac{a \cdot x + b \cdot y + c}{a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1}\right) \qquad (*)$$

$$y' = \frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 3}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$y' = \frac{2x + y + 1}{2 \cdot (2x + y) - 3}$$

$$z = 2x + y, \qquad z' = 2 + y' \quad \Rightarrow \quad y' = z' - 2$$

$$z' - 2 = \frac{z + 1}{2z - 3}, \qquad z' = \frac{z + 1}{2z - 3} + 2 = \frac{5z - 5}{2z - 3}$$

$$\frac{2z - 3}{5z - 5} dz = dx$$

$$\frac{1}{5}\int \frac{2z - 3}{z - 1} dz = \frac{1}{5}\int \frac{2 \cdot (z - 1) - 1}{z - 1} dz = \frac{2}{5} z - \frac{1}{5} \cdot \ln|z - 1|$$

$$\frac{2}{5} z - \frac{1}{5} \cdot \ln|z - 1| = x + c$$

$$\frac{2}{5} \cdot (2x + y) - \frac{1}{5} \cdot \ln|2x + y - 1| = x + c.$$

Линейные уравнения 1-го порядка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Линейным уравнением первого порядка называется уравнение линейное относительно y' и y. (Относительно x линейность никто не гарантирует.)

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x) \qquad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если $Q(x) = 0$, то линейное уравнение называется линейным однородным уравнением.

ДВА СПОСОБА РЕШЕНИЯ

1) Чтобы решить уравнение (1) необходимо найти общее решение соответствующего однородного уравнения (2). В полученном решении постоянную c рассматривать как функция от x, т.е. $c = c(x)$, подставить в (1) и найти c.

2) $y' + P(x)\cdot y = Q(x)$

Метод Бернулли.

$$y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

$$y' = y \cdot \operatorname{tg} x = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = -y \cdot \operatorname{tg} x, \qquad \frac{dy}{y} = -\operatorname{tg} x \, dx$$

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + \ln c, \qquad y = c \cdot \cos x$$

Пусть $c = c(x)$, тогда $y = c(x) \cdot \cos x$

$$y' = c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x$$

Подставим в исходное уравнение:

$$c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x + c(x) \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

$$c'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad c(x) = \operatorname{tg} x + c$$

$$y = c(x) \cdot \cos x = (\operatorname{tg} x + c) \cdot \cos x = \sin x + c \cdot \cos x.$$

Метод Бернулли.

$$y = u(x)\cdot v(x)$$

$$y' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

$$u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) + P(x)\cdot u(x)\cdot v(x) = Q(x)$$

$$u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot \left(v'(x) + P(x)\cdot v(x)\right) = Q(x)$$

$$\begin{cases} v'(x) + P(x)\cdot v(x) = 0 & \qquad (A) \\ u'(x)\cdot v(x) = Q(x) & \qquad (B) \end{cases}$$

(A) – уравнениес разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx} = P(x)\cdot v, \qquad\qquad \frac{dv}{v} = P(x)\,dx$$

$$\ln|\,v\,| = \int P(x)\,dx + c$$

Т.к. в качестве $v(x)$ можно взять любое частное решение уравнения (A), то положим $c = 0$, тогда $v = e^{\int P(x)\,dx}$.

(B): $u'(x)\cdot e^{\int P(x)\,dx} = Q(x)$ – *уравнение с разделяющимися переменными.*

$$du = Q(x)\cdot e^{-\int P(x)\,dx}dx \quad\Rightarrow\quad u = \int Q(x)\cdot e^{-\int P(x)\,dx}dx + c$$

$$y = u(x)\cdot v(x)$$

$$y' - 2x \cdot y = e^{x^2} \cdot \cos x, \qquad y(0) = 2.$$

$y = u(x) \cdot v(x), \qquad y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ (опускаем аргумент для краткости)

$$u' \cdot v + u \cdot v' - 2x \cdot u \cdot v = e^{x^2} \cdot \cos x$$

$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' - 2x \cdot v\right) = e^{x^2} \cdot \cos x$$

$$\begin{cases} v' - 2x \cdot v = 0 & (A) \\ u' \cdot v = e^{x^2} \cdot \cos x & (B) \end{cases}$$

$$(A): \quad \frac{dv}{dx} = 2x \cdot v, \qquad \frac{dv}{v} = 2x\,dx, \qquad \ln|v| = x^2, \qquad v = e^{x^2}.$$

$$(B): \quad u' \cdot e^{x^2} = e^{x^2} \cdot \cos x, \qquad du = \cos x\,dx, \qquad u = \sin x + c.$$

$y = \left(\sin x + c\right) \cdot e^{x^2}$ – общее решение.

$$y(0) = 2, \ \text{т.е.} \ x_0 = 0, \ y_0 = 2 \qquad \rightarrow \qquad 2 = c$$

$y = \left(\sin x + 2\right) \cdot e^{x^2}$ – частное решение.

Уравнение Бернулли

- $y' + P(x)y = Q(x)y^n$
- Замена: $z = y^{1-n}$
- Получаем линейное уравнение для z

Контрольные вопросы

- • Определение однородного ДУ
- • Замена y=ux
- • Когда ДУ приводится к однородному?
- • Линейное ДУ
- • Интегрирующий множитель
- • Уравнение Бернулли

Рекомендуемая литература

- 1. Қасымов Қ., Қасымов Ә. Жоғары математика курсы. Алматы, Санат, 1994
- 2. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика. Алматы, ҚБТУ, 2004
- 3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). Алматы, Иль-Тех-Кітап, 2003
- 4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: «Наука». – 1989. – 656 с.
- 5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1, М: «Наука». – 1982.
- 6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М: «Наука». – 1991.
- 7. Шипачев В.С. Высшая математика
- 8. Ефимов Н.В., Краткий курс аналитической геометрии.
- 9. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика.